Cycle Ingénieur

Programme du concours d'admission parallèle en première année
Concours IOGS

Les candidats retenus après examen du dossier sont convoqués pour des épreuves écrites en mathématiques et en physique (1h30 chacune) et un test d'anglais de type TOEIC (2h) regroupés sur une même journée du lundi.
A l'issue de ces épreuves, une partie des candidats est retenue pour les épreuves orales. Les candidats sont informés de la décision les concernant le mardi en début d'après midi. Les candidats retenus passent quelques jours plus tard (jeudi après midi ou vendredi matin):

- une épreuve orale de mathématiques de 20mn
- une épreuve orale de physique de 20mn
- un entretien de motivation de 20mn

Ils peuvent être dispensés d'une des épreuves orales de mathématiques ou de physique si leur résultat à l'écrit est jugé satisfaisant (typiquement note supérieure à 13).

Programme de l'épreuve de Mathématiques (voir page suivante + exemple de l'examen 2015 donné en annexe à titre d'exemple)

Programme de l'épreuve de Physique (durée 1h30)

- Interférence à deux ondes, à ondes multiples
- Diffraction
- Polarisation
- Optique géométrique : Lentille mince convergente/divergente, relation de conjugaison
- Electronique : R, L, C ; régime transitoire, régime sinusoïdal, impédance complexe
- Indice de réfraction, ondes planes
- Réfraction/réflexion à une interface – lois de Snell-Descartes

Le texte de l'examen de physique 2015 est donné en annexe à titre d'exemple.

Programme de l'épreuve d'Anglais (durée 2 heures)

Il s'agit d'un test de type TOEIC avec une partie compréhension orale et une partie compréhension écrite. Les candidats pourront se référer aux nombreux ouvrages de préparation à ce type de test. A titre indicatif, tous les candidats retenus aux épreuves orales en 2015 avaient un score supérieur à 700/990, et un score inférieur à 600 a été considéré comme éliminatoire.

Le programme des épreuves orales en mathématiques et en physique est le même que pour les écrits. Elles consistent en général à reprendre les points qui ont été mal traités dans l'épreuve écrite. L'étudiant résoud directement au tableau le ou les exercices que lui soumet l'enseignant.

Programme du concours d'admission sur titre – Mathématiques

Les énoncés des sujets de l'épreuve écrite sont volontairement trop longs pour être traités dans leur globalité durant la durée de l'épreuve. Cependant, les thèmes traités couvrent un champ large et sont suffisamment variés pour permettre aux candidats de traiter les exercices qui correspondent au programme de la formation qu'ils ont suivie.

Algèbre linéaire – calcul matriciel :

- Calcul de déterminants,
- Calcul d'inverses,
- Recherche de valeurs propres,
- Fonctions propres d'un système linéaire,
- Changement de base.

Suites et séries :

- Développement en série de Fourier,
- Calcul du terme général d'une suite algébrique, géométrique, récurrente (ordre 1 et 2).

Nombres complexes :

- Calculs élémentaires (partie réelle, partie imaginaire, module, argument),
- Calcul du carré ou de la racine carrée d'un complexe,
- Formules d'Euler.

Equations différentielles

- Equations linéaires d'ordre 1 et 2 à coefficients constants et non constants,
- Résolution par méthode de variation de la constante.

Calcul d'intégrales – de dérivées :

- Méthodes de calcul classiques : changement de variable, intégration par parties, etc.
- Connaissances des primitives et dérivées classiques.

Probabilités et variables aléatoires :

- Calcul de probabilités, dénombrements,
- Calcul d'espérances et de variances,
- Lois de probabilité et fonctions de répartition

Décomposition en éléments simples

Développements limités

Cycle Ingénieur
Concours d'admission sur titre
en $1^{\text{ère}}$ année

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Lundi 8 juin 2015

Durée 1 heure 30. Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Remarque : L'énoncé ci-dessous est volontairement trop long pour la durée de l'épreuve. L'objectif est de vous donner l'opportunité de choisir les exercices en fonction de vos acquis. Il vous est donc conseillé de bien lire l'ensemble de l'énoncé avant de commencer l'épreuve.

1 Étude de fonction

La figure 1 montre le graphe de deux fonctions de même forme générale et dont les expressions sont

$$F_1(x) = a_1 + b_1 \cos(q_1 \pi x) \tag{1}$$
$$F_2(x) = a_2 + b_2 \cos(q_2 \pi x) \tag{2}$$

F_1 est représentée en trait plein fin et F_2 en tirets gras.

1. En vous appuyant sur la figure, précisez les valeurs de q_1 et q_2.
2. Avec quelles caractéristiques des graphes lit-on les quantités $a_1 + b_1,\ a_1 - b_1,$ et $a_2 + b_2,\ a_2 - b_2$?
3. En déduire les quatre coefficients a_1, b_1, a_2, b_2.
4. Que valent littéralement puis numériquement les dérivées secondes $H_1(x) = \mathrm{d}^2F_1(x)/\mathrm{d}x^2$ et $H_2(x) = \mathrm{d}^2F_2(x)/\mathrm{d}x^2$ au niveau des maxima ($F_1(x) = 8$ et $F_2(x) = 8$) ?
5. Sont-elles égales, peu différentes ou très différentes ? Le graphe le confirme-t-il ?
6. Soit une expression complexe de la forme $c(x) = c_1 + d_1 \exp(iq_1\pi x)$, où i est le complexe tel que $i^2 = -1$. Montrez, sans résoudre numériquement l'équation, que l'on peut avoir
$$|c(x)|^2 = F_1(x) \tag{3}$$
Vous vous contenterez d'écrire les relations entre c_1, d_1 et a_1, b_1.
7. Résolvez numériquement l'équation (3) en vous basant sur les cas extrêmes $F_1(x) = 8$ et $F_1(x) = 2$.
8. Quel serait le graphe de $F_3(x) = |c_1 + d_1 \exp(i[q_1\pi x + \pi])|^2$? Quelle relation aurait-il avec celui de F_1 ?

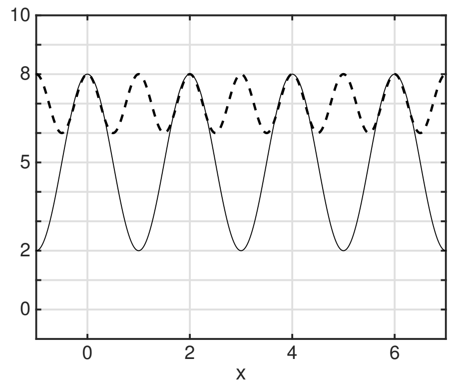


FIGURE 1 – Allure de $F_1(x)$ en trait plein et de $F_2(x)$ tirets gras. Les échelles sont linéaires.

On définit maintenant la fonction $G(x) = F_1(11x/\pi) + F_1(9x/\pi)$. On obtient le graphe de la figure 2.

9. Montrez que $G(x) = A + B\cos(Cx)\cos(Dx)$ avec $C > D$.
   Vous expliciterez les valeurs numériques de A, B, C et D.
10. Vos résultats sont-ils cohérents avec la figure 2 ? A quelles caractéristiques de la courbe correspondent C et D ?

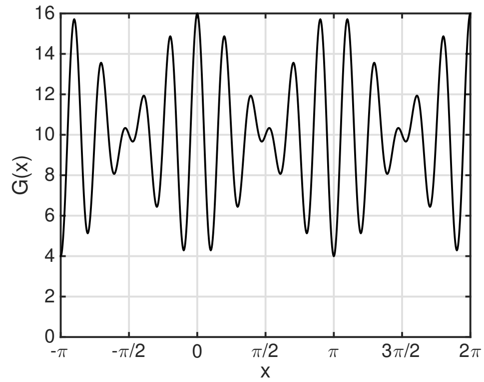


FIGURE 2 – Allure de $G(x)$. Les échelles sont linéaires.

2 Nombres complexes

On définit le nombre complexe $z = x + iy = \rho e^{i\phi}$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(\rho, \phi) \in \mathbb{R}^2$ et i est le complexe tel que $i^2 = -1$. On note $\bar{z}$ son conjugué et $M = (x, y)$ le point d'affixe z.

1. Explicitez x et y en fonction de ρ et ϕ.
2. Sur le même graphe, représentez successivement :
   (a) l'ensemble des points M tels que $\rho\cos\phi = 2$.
   (b) l'ensemble des points M tels que $\rho\sin\phi = 3$.
   (c) l'ensemble des points M tels que $z + \bar{z} = -4$.
   (d) l'ensemble des points M tels que $z - \bar{z} = -6i$.
   (e) l'ensemble des points M tels que $z + \bar{z} = |z|$.
   (f) l'ensemble des points M tels que $|z + i| = |z - i|$.

Soit $z' = x' + iy' = \rho' e^{i\phi'}$ un second nombre complexe, où $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, $(\rho', \phi') \in \mathbb{R}^2$.

3. Montrez que $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$.

3 Algèbre linéaire et nombres complexes

Soit la matrice

$$\mathbf{M} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3+i & \sqrt{3}[i-1] \\ \sqrt{3}[i-1] & 3i+1 \end{pmatrix}$$

où i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$. On notera $\mathrm{Tr}(\mathbf{M})$ et $\mathrm{Det}(\mathbf{M})$ la trace et le déterminant de $\mathbf{M}$.

1. Soient λ_1 et λ_2, les deux valeurs propres de $\mathbf{M}$. Rappelez les expressions de $\mathrm{Tr}(\mathbf{M})$ et $\mathrm{Det}(\mathbf{M})$ en fonction de λ_1 et λ_2.
2. Déterminez λ_1 et λ_2.
3. Donnez deux vecteurs de propres $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ de $\mathbf{M}$. Vous choisirez des vecteurs de norme unité.
4. Représentez ces vecteurs dans le plan.
5. Quelle transformation géométrique faut-il appliquer pour passer de la base $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ à la base canonique du plan $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$?
6. Appliquez ce changement de base à la matrice $\mathbf{M}$. Le résultat obtenu pouvait-il être prévu ?

4 Équations différentielles

Résolvez les équations différentielles suivantes.

1. $\forall t > -1,\ (1+t)y(t)' + y(t) = 1 + \ln(1+t)$, avec $y(0) = 4$
2. $\forall t \in \mathbb{R},\ y(t)'' + y(t)' - 2y(t) = 10\sin(2t)$, avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$

5 Calcul de primitives et d'intégrales

Calculez les primitives et intégrales suivantes :

1. Sur $\mathbb{R},\ I_1 = \displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^4}$
2. Sur $]-1,1[,\ I_2 = \displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{1-x^4}$
3. Sur $\mathbb{R},\ I_3 = \displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x$
4. Sur $\mathbb{R},\ I_4 = \displaystyle\int \mathrm{arctan} x \mathrm{d}x$
5. Sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1,2\},\ I_5 = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2-1)(x-2)^2}\mathrm{d}x$
6. $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, w \in \mathbb{R},\ I_6 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i w x - a|x|}\mathrm{d}x$
7. $I_7 = \displaystyle\int\int_D xye^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq a, 1 \leq y \leq b\}$

6 Variables aléatoires

On considère une urne contenant trois boules jaunes, deux boules bleues, une boule rouge et quatre boules vertes. Ces boules de même taille sont indiscernables au toucher. On tire, au hasard, une boule de l'urne.

1. Calculez la probabilité des événements suivants
   — J = "tirer une boule jaune"
   — B = "tirer une boule bleue"
   — R = "tirer une boule rouge"
   — V = "tirer une boule verte"
2. En fonction de la couleur tirée, on se voit attribuer une somme d'argent selon la convention suivante : si la boule tirée est :
   — rouge, on gagne 10 €
   — verte, on gagne 2 €
   — jaune ou bleue, on gagne 3 €
   Soit X la variable aléatoire qui associe le tirage au gain réalisé.
   (a) Déduisez de la question 1 les valeurs des probabilités suivantes : $\mathbf{P}[X=2]$, $\mathbf{P}[X=3]$ et $\mathbf{P}[X=10]$
   (b) Calculez l'espérance mathématique $\mathbf{E}[X]$ de la variable aléatoire X
   (c) Donnez l'expression et la valeur de sa variance et de son écart–type.

Institut d'Optique-Graduate School

EXAMEN DE PHYSIQUE

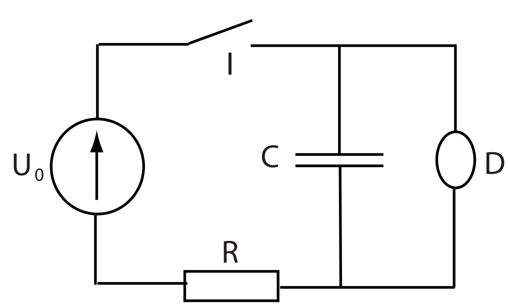
08 juin 2015

Documents interdits, calculatrice interdite ; les deux exercices sont indépendants et ont le même poids dans la notation.

1 Electricité

On considère le circuit schématisé ci-dessous, constitué d'un générateur de force électromotrice U_0, d'un interrupteur I, d'une résistance R, d'un condensateur C et d'une lampe à décharge D, qui peut être allumée ou éteinte.

Eteinte, la lampe constitue un interrupteur ouvert. Allumée, elle est équivalente électriquement à une résistance r. Allumage de la lampe : si la lampe est initialement éteinte il faut augmenter la différence de tension V à ces bornes et elle s'allumera dès que $V \geq V_a$. Une fois allumée, la lampe le reste même si on baisse la tension V du moment que $V \geq V_e$ avec $V_e < V_a$. La lampe se re-éteint donc si $V < V_e$.



1. On suppose qu'initialement le condensateur est déchargé et la lampe éteinte. A l'instant $t = 0$ on ferme l'interrupteur I.

   (a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la charge Q du condensateur *en supposant que la lampe reste éteinte*.

   (b) En déduire $Q(t)$, toujours dans la même hypothèse. En déduire également $V(t)$.

   (c) Représenter graphiquement $V(t)$, au moins pour les premiers instants suivant la fermeture de l'interrupteur.

2. Qu'arrive-t-il si $U_0 > V_a$? On se place dans cette situation dans la suite.

3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $V(t)$ quand la lampe est allumée.

4. On note t_0 le temps tel que $V(t_a) = V_a$. Montrer qu'on trouve pour $t \geq t_a$:

$$V(t) = U'_0 + (V_a - U'_0)\exp[-(t - t_a)/\tau]$$

   Donner l'expression de U'_0 et τ en fonction des paramètres du problème.

5. On se place dans le cas où $V_e < U'0 < V_a$. Continuer la représentation graphique de $V(t)$ commencée au 1c.

6. A quelle condition sur U'_0, la lampe peut au contraire s'éteindre?

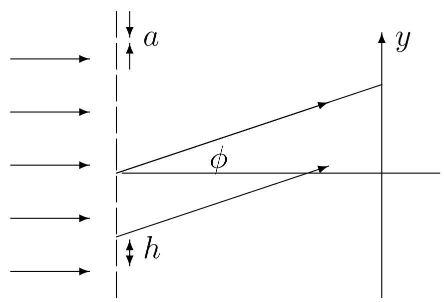
7. Calculer dans ce cas la durée T_a pendant laquelle la lampe reste allumée.

8. Après l'extinction de la lampe, que va-t-il se passer ? Quelle est la propriété remarquable de la fonction $V(t)$? Nom du phénomène ?

2 Optique

On considère un réseau périodique de N fentes perpendiculaires au plan de la figure, supposées infiniment longues et éclairées, comme sur le schéma ci-dessous, par un faisceau de lumière parallèle, monochromatique de longueur d'onde λ et en incidence normale par rapport au réseau.

On considère la situation où la largeur a des fentes est très fine : $a \ll \lambda$ et $a \ll h$ avec h la distance entre les fentes, appelée aussi pas du réseau.



1. On considère d'abord uniquement une fente. Décrire qualitativement la forme du faisceau lumineux après traversée de la fente. Quel est le nom du phénomène que vous venez de décrire ?

2. (a) On considère maintenant le réseau en entier. A quel phénomène donne lieu la recombinaison, après le réseau, de la lumière passée par toutes les fentes ? Pourquoi la condition $a \ll \lambda$ est-elle importante à respecter pour une bonne utilisation du réseau?

   (b) On s'intéresse à deux trajets lumineux, l'un issu de la fente numéro n, l'autre de la fente numéro 0, faisant tous les deux un angle ϕ par rapport au faisceau incident (voir figure). Donner l'expression de la différence de marche entre ces deux trajets en fonction de ϕ et h.

   (c) En déduire l'amplitude complexe $a_n(\phi)$ de la lumière issue de la fente n en fonction de $a_0(\phi)$, amplitude due à la seule fente numéro zéro. On simplifiera le calcul en notant $u = \frac{2\pi}{\lambda} h \sin \phi$.

   (d) En déduire l'amplitude complexe totale $A(\phi) = \sum\limits_{n=0}^{N-1} a_n(\phi)$ de la lumière émise dans la direction ϕ à l'infini.

3. On dispose, après le réseau, une lentille convergente, de distance focale f. Quel est l'effet de cette lentille ? A quelle distance de la lentille faut-il placer un écran pour visualiser le phénomène décrit aux questions précédentes ? Faire un schéma.

4. On considère que tous les angles ϕ qui interviennent dans le problème sont des angles petits.

   (a) Montrer que l'éclairement de l'écran en fonction de l'ordonnée y peut se mettre sous la forme

   $$I(y) = |A(\phi)|^2 = I_0(\alpha)\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\pi y h}{\lambda f}$$

   (b) Représenter graphiquement I sur l'intervalle $\alpha \in [0, 2\pi]$. Indiquer en particulier, la plus grande valeur atteinte par l'éclairement en fonction de I_0.

   (c) Donner l'expression des positions $y = Y_p(\lambda)$, avec p un entier relatif, où $I(y)$ est maximale.

   (d) Le pouvoir de dispersion du réseau est défini par $\frac{\mathrm{d}Y_p}{\mathrm{d}\lambda}$. Comment ce pouvoir de dispersion varie-t-il avec le pas du réseau h ? Un réseau est-il plus dispersif suivant que ses fentes sont plus serrées ou moins serrées ?